**Правительство Российской Федерации**

**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Параллельные алгоритмы метода конечных элементов для

краевых задач математической физики

Parallel Algorithms of Finite Element Method for Boundary Value

Problems of Mathematical Physics

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: 038169

Санкт-Петербург

2020

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Освоение основных приемов создания быстрых параллельных алгоритмов численного решения уравнений в частных производных и их реализации в программах для массово параллельных компьютеров. Знакомство с наиболее крупными проектами численного решения на суперкомпьютерах краевых задач, возникающих в инженерных приложениях и научных исследованиях. Вычислительная наука как третья компонента познания. Знакомство с наиболее распространенными архитектурами параллельных компьютеров, их характеристиками и их влиянием на быстродействие алгоритмов. Бессмысленность распараллеливания плохих алгоритмов, предельная эффективность распараллеливания. Общие идеи построения быстрых параллельных итерационных алгоритмов: предобусловливание, многоуровневые методы и методы декомпозиции области.

Формирование системного, аналитического и алгоритмического мышления и навыков для создания и реализации параллельных алгоритмов и компьютерных программ для решения научных и практических задач, включая этапы постановки и решения задачи или проекта, выбора технических средств. Формирование соответствующих компетенций, в том числе навыков работы в коллективе.

Поставленные цели будут достигнуты путём изучения основных концепций, понятий и базисных модулей сеточных методов решения краевых задач механики и физики и основных программных средств их распараллеливания, знакомства с наиболее значимыми примерами реализации параллельных алгоритмов для решения крупных задач.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Общие сведения, приобретаемые на 1-3 годах обучения по методам вычислений, линейной алгебре, программированию, математической физике и сеточным методам решения уравнений в частных производных.

Дисциплина “Параллельные алгоритмы метода конечных элементов для краевых задач математической физики” является базовым курсом в подготовке профессионального математика – создателя прикладных программ с применением параллельных вычислений.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Знать содержание дисциплины “Параллельные алгоритмы метода конечных элементов для краевых задач математической физики”, в частности, иметь представления о способах аппроксимаций краевых задач математической физики и членных методах решения сеточных систем уравнений, возможностях распараллеливания методов решения в программных реализациях для ЭВМ. Знание этих вопросов должно быть достаточным для возможности успешного применения параллельных численных методов для наиболее распространенных в приложениях классов уравнений в частных производных. Освоить приемы распараллеливания наиболее эффективных многоуровневых/многосеточных алгоритмов и алгоритмов метода декомпозиции области с перекрытием и без перекрытия областей.

Уметь разработать проект эффективного алгоритма для сложных краевых задач, блок-схему программы, схему распараллеливания и оценить арифметическую сложность, время выполнения и эффективность распараллеливания применительно к компьютерной системе заданной архитектуры. Уметь оценить сложность и временные затраты разработки программы.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

В качестве основных интерактивных форм (общее количество 4 часа) предполагается

• лекции и домашние задания в рамках самостоятельной работы с использованием методических материалов;

• рассмотрение параллельных алгоритмов и обсуждение результатов выполнения домашних заданий;

Примеры домашних заданий:

• Распараллеливание алгоритма численного решения двухточечной задачи для ОДУ 2-го порядка. Компьютерная реализация.

• Программа формирования матрицы жесткости метода конечных элементов для уравнения Пуассона и матрично-векторных умножений с поэлементным распараллеливанием. Компьютерная реализация.

• Программа, реализующая параллельный алгоритм численного решения уравнения Пуассона в L-образной области методом декомпозиции области с перекрытием областей. Компьютерная реализация.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |  | |  | |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 7 | 48 |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 28 | |  | 28 |  | 4 | | 3 | |
|  | 1-  10 |  | 1-  10 |  |  |  |  |  | 1-100 |  |  |  | 1-1 | |  | 1-1 |  |  | |  | |
| ИТОГО | 48 |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 28 | |  | 28 |  |  | | 3 | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Формы текущего контроля успеваемости, виды промежуточной и итоговой аттестации | | | |
| Период обучения (модуль) | Формы текущего контроля успеваемости | Виды промежуточной аттестации | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | |
| очная форма обучения | | | |
| Семестр 7 |  | экзамен |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Период обучения (модуль): Семестр 7

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| I. | Тема 1. Введение. Классификация, архитектура и наиболее важные храктеристики массово параллельных компьютеров | лекции | 7 |
| по методическим материалам | 2 |
| II. | Особенности параллельных алгоритмов, глобальные операции, оценка эффективности распараллеливания | лекции | 8 |
| по методическим материалам | 2 |
| III. | Тема 3. Основные алгоритмы метода конечных элементов | лекции | 13 |
| по методическим материалам | 2 |
| IV. | Тема 4. Алгоритмы метода конечных элементов в параллельном режиме | лекции | 5 |
| по методическим материалам | 10 |
| V. | Тема 5. Классические точные и итерационные методы решения СЛАУ | лекции | 5 |
| по методическим материалам | 1 |
| VI. | Тема 6. Предобусловливание, многосеточный метод и метод декомпозиции области и их распараллеливание | лекции | 10 |
| по методическим материалам | 11 |
| VII. | Промежуточная аттестация | консультация | 2 |
| самостоятельная работа | 28 |
| экзамен | 2 |
| **Итого** | | | **108** |

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины обеспечивается посещением лекций, участием в обсуждении вопросов, подготовленных к занятию, самостоятельной работой, включающей в себя чтение специальной литературы по разделам темы, подготовку и презентацию докладов по тематике курса

На ряде занятий предполагается использовать портативный компьютер и медиапроектор

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

СРС направлена на закрепление и углубление освоения учебного материала, развитие практических умений. СРС включает следующие виды самостоятельной работы студентов:

– работа с лекционным материалом и с рекомендованной литературой;

– изучение разделов, вынесенных на самостоятельную проработку;

– выполнение домашних заданий по написанию программ, домашних контрольных работ заданных преподавателем;

– подготовка к практическим занятиям;

– подготовка к контрольным заданиям, экзамену.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Методика проведения экзамена.

Экзамен проводится в устной форме. Билет содержит 2 вопроса из списка вопросов к экзамену. На подготовку к ответу в аудитории отводится не менее 1 академического часа.

После ответа на вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на экзамен. В качестве дополнительных, используются вопросы, не требующие длительного вывода и трудоемких вычислений, в том числе определения, основные формулы, основные графики. Так же в качестве дополнительных могут быть предложены вопросы, связанные с практической реализацией параллельных алгоритмов в домашних заданиях.

Критерии выставления оценок за ответ на экзамене.

Оценка «отлично» выставляется, если выполняются оба условия:

1. обучающимся даны полные исчерпывающие ответы по всем вопросам билета, обучающийся свободно ориентируется в материале;
2. обучающийся отвечает на все дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполняются оба условия

1. обучающимся дан полный ответ на один из вопросов билета, по второму вопросу написаны все определения, основные формулы и графики (в случае наличия);
2. обучающийся отвечает более чем на 3/4 дополнительных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполняются оба условия

1. по обоим вопросам написаны все основные определения, формулы и графики (в случае наличия);
2. обучающийся дает правильный ответ более чем на половину заданных дополнительных вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

Оценка **A** («отлично») ставится студенту, полностью овладевшему теоретическим материалом и продемонстрировавшему принципы его применения на практике. Даны правильные полные ответы на вопросы билета и дополнительные вопросы. Допустимо исправление одной-двух неточностей после замечания преподавателя.

Оценка **B** («хорошо») ставится студенту, полностью овладевшему основным теоретическим материалом и основными принципами его применения на практике, допустившим, однако, ошибки во второстепенных деталях. При этом студент демонстрирует способность исправить ошибки после просьбы преподавателя об уточнении ошибочных утверждений.

Оценка **С** («хорошо») ставится студенту, если он дал на 75 % правильный ответ на вопросы билета и дополнительные вопросы. При этом студент должен показать способность активного владения теоретическим материалом и применения на практике и исправления указанных преподавателем ошибок.

Оценка **D** («удовлетворительно») ставится студенту, имеющему пробелы в овладении теоретическим материалом или в его применении на практике. При этом только 60--65% ответа верна, и студент испытывает затруднения с исправлением ошибок, указанных преподавателем.

Оценка **E** («удовлетворительно») ставится студенту, имеющему пробелы как в овладении теоретическим материалом, так и в его применении на практике, если эти пробелы не являются решающими и студент хорошо освоил более половины материала, покрытого вопросами. Студент не способен исправить все неточности, замеченные преподавателем, но активно владеет освоенной частью материала.

Оценка **F** («неудовлетворительно») ставится студенту, имеющему существенные пробелы в овладении теоретическим материалом и в его применении на практике. Ответ на один из вопросов содержит принципиальные ошибки, или только частичный (в том числе, отсутствует), или при ответе не продемонстрировано понимание предмета вопроса.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный перечень вопросов к экзамену.

**Тема 1**. Введение. Классификация, архитектура и наиболее важные характеристики массово параллельных компьютеров

1. Бесполезность распараллеливания неэффективных алгоритмов. Пример: решение СЛАУ МКЭ для ОДУ 2-го порядка распараллеленным итерационным методом Якоби в сравнении с методом прогонки.

2. Пример быстрого и эффективно распараллеливаемого алгоритма метода декомпозиции области (МДО) при решении СЛАУ МКЭ для ОДУ 2-го порядка.

3. Конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа, прямые и итерационные методы ее решения и их арифметическая сложность.

4. Архитектура и наиболее важные характеристики массово параллельных компьютеров.

5. Топологии обмена информацией в современных суперкомпьютерах.

**Тема 2.** Особенности параллельных алгоритмов, глобальные операции, оценка эффективности распараллеливания

6. Классификация Флинна параллельных компьютеров.

7. Классификация по способам разделения памяти. Структура распределения памяти в современных компьютерах (IBM, SUN, SGI, HP, NEC, FUJITSY).

8. Специфические свойства параллельных алгоритмов: синхронизация, передача сообщений, взаимоблокировка (зависание), когерентность (непротиворечивость) данных.

9. Основные глобальные операции.

10. Оценка эффективности параллельных алгоритмов.

**Тема 3.** Основные алгоритмы метода конечных элементов

11. Метод конечных элементов как метод Галеркина (на примере двухточечной задачи для ОДУ второго порядка), сравнение с конечно-разностным методом.

12. МКЭ для уравнения Пуассона в прямоугольнике и в произвольной двумерной области. Основные модули программных реализаций метода конечных элементов

13. Триангуляции произвольных достаточно гладких областей. Квазиоднородные, неоднородные, структурированные, топологически эквивалентные триангуляции. Простейшие алгоритмы триангуляции и их распараллеливание.

14. Матрицы жесткости и векторы нагрузок конечных элементов, их вычисление.

Процедура сборки в компьютере СЛАУ МКЭ.

15. Сведение оценок погрешности к оценкам аппроксимации и способы их

получения. Основные факторы, влияющие на погрешность МКЭ.

16. Двухслойные итерационные методы решения СЛАУ с с.п.о. матрицами и скорость их сходимости.

17.\* Сходимость в случае СЛАУ МКЭ.

**Тема 4.** Алгоритмы метода конечных элементов в параллельном режиме

18. Хранение разреженных матриц. По-элементное распараллеливание матрично-векторных операций умножения в итерационных процессах.

19. Декомпозиция области непересекающимися подобластями, способы распределения данных.

**Тема 5.** Классические точные и итерационные методы решения СЛАУ

20. Параллельные варианты прямых методов: LU и ILU факторизации,

их сравнение. ILU-факторизация в специальных случаях.

21. Сглаживатели (smoothers): метод Якоби, мето Гаусса-Зейделя, его красно-черный и паралельный варианты, метод переменных направлений,

22. Огрубители (roughers): параллельный метод сопряженных градиентов, метод квазиминимальных невязок (QMR), стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BICSTAB), предобусловливание.

**Тема 6.** Многосеточный метод и метод декомпозиции области и их распараллеливание

23. Общий алгоритм многосеточного метода.

24. Компоненты параллельного алгоритма многосеточного метода.

25. Аддитивный МДД c перекрытием подобластей декомпозиции. Зависимость скорости сходимости и объема обмена информацией между процессорами от величины перекрытия подобластей.

26. МДД как предобусловливание.

27.\* Структура предобусловливателя МДО без перекрытия подобластей декомпозиции. Связь с точным методом подструктур.

28. Предобусловливание посредством неточных солверов. Предобусловливатель-солвер для матрицы дополнения Шура для интерфейсной границы между подобластями декомпозиции.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К проведению занятий должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень не ниже кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории для проведения интерактивных лекций: видеопроектор, экран, др. оборудование.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Не требуется

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Фломастеры цветные, губки в объеме, необходимом для организации и проведения занятий

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. В.В. Воеводин. Вычислительная математика и структура алгоритмов. Издательство МГУ, 2010, 163 с.

2. И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович, Т.О. Евдокимова, О.Н. Иванцова, И.Д. Мирошниченко Параллельные алгоритмы. Разработка и реализация. Учебное пособие. М., Национальный открытый университет Интуит-Бином. Лаборатория знаний. 2012, 343с.

3. Korneev V.G., Langer U. Dirichlet-Dirichlet Domain Decomposition Methods for Elliptic Problems, h and hp Finite Element Discretizations. New Jesey--London-- Singapore--Beijing: World Scientific, 2015. 484 р.

* + 1. **Список дополнительной литературы**

1. C. C. Douglas, G. Haase and U. Langer. A Tutorial on Elliptic PDE Solvers and their parallelization. SIAM, 2003.

**2. M. Bruaset, a. Tveito, eds. Numerical solution of differential equations on parallel computers. Lecture notes in science and engineering, v.51, Shpringer, 2006.**

**3.**Э. Митчелл, Р. Уэйт. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными.  Москва, «Мир», 1981.

**4.** О. Зенкевич*.* Метод конечных элементов в технике*.* Москва, «Мир», 1975.   
5. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. 1977, Изд-во Ленинградского гос. ун-та, 205с.

6. Ю.С. Васильев, В.Г. Корнеев В.Г.  Третий компонент познания - научные компьютерные супервычисления. Ученые записки Казанского государственного университета. Казань: Казанский государственный университет, Т. 149, кн. 4, 2007.

7. V. Korneev and Langer U. Domain Decomposition Methods and Preconditioning. In: Encyclopedia of Computational Mechanics,V.1. E. Stein, R. de Borst and Th.J.R. Hudges eds. -- 2004 John Wiley & Sons, Ltd. 617-647., 2004.

8. [ЭР по подписке СПбГУ] R. Trobec, G. Kosec. Parallel Scientific Computing Theory, Algorithms, and Applications of Mesh Based and Meshless Methods. Springer International Publishing: Imprint: Springer, 2015.

9. Р.Миллер, Л.Боксер. Последовательные и параллельные алгоритмы. Общий подход. М.,БИНОМ. 2017.

* + 1. **Перечень иных информационных источников**

Не требуется

**Раздел 4. Разработчики программы**

Корнеев Вадим Глебович, профессор мат-мех факультета СПбГУ, v.korneev@spbu.ru.